Def 2.1 $A = C^*$-algebra, $J \subseteq A$ ideał : J nazywamy istotnym gdy $\forall_{\substack{I \subseteq A \\ I\text{-ideał} \neq 0}} \; I \cap J \neq \{0\}$

Fakt 2.2 J jest istotny $\iff \forall_{a \in A} \; aJ = \{0\} \Rightarrow a = 0$

Dowód „$\Leftarrow$" weźmy $I \neq \{0\}$, weźmy $\underset{x \in I}{x \neq 0}$; $x \neq 0 \underset{\text{przez kontrapozycję}}{\overset{\text{założenie}}{\Longrightarrow}} xJ \neq \{0\} \Longrightarrow$

$\Rightarrow \exists_{y \neq 0} \; y \in xJ \Rightarrow \exists_{a \in J} \; \underset{\neq 0}{y} = \underset{\in I}{x} a^{\in J} \in I \cap J \Rightarrow I \cap J \neq \{0\}$.

„$\Rightarrow$" • pomocniczo: gdy I-ideał w C^*-alg $\Rightarrow I^2 = I$

Dowód → zawsze $I^2 \subseteq I$; gdy $\underset{a \geqslant 0}{a \in I} \Rightarrow a = (\underset{\in I}{a^{\frac{1}{2}}})^2 \in I^2$

→ dowolne $x \in I$ jest postaci $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$ gdzie $x_i \geqslant 0$ $i = 1,2,3,4$

i $x_i \in I \Rightarrow x_i \in I^2 \Rightarrow x \in I^2$. Zatem $I = I^2$ //

• pomocniczo gdy I, J - ideały w C^*-algebrze to $I \cap J = IJ$

Dowód. → zawsze $I \cap J$ - ideał ; z powyższego $I \cap J = (I \cap J)^2$

→ mamy więc $(I \cap J)^2 \subseteq IJ \subseteq I \cap J = (I \cap J)^2 \Longrightarrow IJ = I \cap J$ //

Niech teraz $aJ = \{0\}$ i $I := \overline{AaA}$ (ideał generowany przez a)

Mamy $I \cap J = IJ = \overline{AaA} \cdot J \overset{(*)}{=} 0$ (*) bo dla $b \in J$ $(xay) \cdot b = x(a \underbrace{(yb)}_{\in J})^{\in aJ = 0} = 0$

$\Rightarrow I = \{0\} \Rightarrow a = 0$ ⊠

Gdy $\{A_s\}_{s \in S}$ - wstępująca rodzina C^*-algebr (wszystkie zawarte w jednej C^* algebrze B)

to $A := \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ też jest C^*-algebrą.

Fakt 2.3 $\forall_{s \in S}$ J istotny w $A_s \Rightarrow J$ istotny w A.

Dowód. Niech $I \neq 0$ ideał w $A \Rightarrow I \cap A_s$ ideał w A_s $\left\{ \begin{array}{l} x \in A_s,\ a \in I \cap A_s \Rightarrow \\ \Rightarrow ax, xa \in I \text{ bo } I\text{-ideał} \\ \text{i } ax, xa \in A_s \text{ bo } a, x \in A_s \end{array} \right.$

$\overset{J\text{-istotny w } A_s}{\Longrightarrow} (I \cap A_s) \cap J \neq \{0\} \overset{\text{tym bardziej}}{\Longrightarrow} I \cap J \neq \{0\}$ ⊠

Niech A = bez jedności, $B = C^*$-algebra z jednością że $A \subseteq B$ oraz

$\mathcal{F} = \{ C \subseteq B : C$ ma jedność i A = ideał istotny w $C \}$

Powyższy argument mówi dokładnie tyle, że niepusty łańcuch w $\mathcal{F}$ ma

kres górny w $\mathcal{F}$: zatem w $\mathcal{F}$ istnieje element maksymalny!

Wada: jak wybrać B? Potrzebujemy reprezentacji!

Parę słów o wiernej reprezentacji:

Lemat 2.4 Niech $f \in A^*$, $\|f\| = 1 = f(e) \Longrightarrow f \geqslant 0$.

Dowód. • Niech $\begin{matrix} x \geq 0 \\ \|x\| \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \|e-x\| \leq 1$ i mamy

$$|f(e-x)| \leq \underbrace{\|f\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|e-x\|}_{\leq 1} \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow \forall_{x \geq 0} f(x) = f(\|x\| \cdot \tfrac{x}{\|x\|}) = \|x\| \underbrace{f(\tfrac{x}{\|x\|})}_{\geq 0} \geq 0$$

$|f(e-x)| = |f(e) - f(x)| = |1 - f(x)|$

• A niech $\|e-x\| \leq 1$? $\|e-x\| = \|\widehat{e-x}\|_\infty = \|\hat{e} - \hat{x}\| = \|1 - \hat{x}\| =$

$= \sup\{|1-\hat{x}(\lambda)| \; \lambda \in \Lambda\}$ (widmo $C^*(e,x)$)

i teraz $\begin{matrix} x \geq 0 \\ \|x\| \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow 0 \leq 1 - \hat{x}(\lambda) \leq 1 \; \forall_{\lambda \in \Lambda} \Rightarrow \sup\{|1-\hat{x}(\lambda)| \; \lambda \in \Lambda\} \leq 1 \Rightarrow \|e-x\| \leq 1$

Gdyby zaś $x \not\geq 0$ to $\exists_{\lambda \in \sigma(x)} \lambda < 0 \Rightarrow \exists_{\varphi \in \Lambda} \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) < 0 \Rightarrow 1 - \hat{x}(\varphi) > 1 \Rightarrow \|e-x\| > 1$ ⊗

Tw. 2.5 Gdy $x = x^*$ to istnieje stan φ spełniający $|\varphi(x)| = \|x\|$.

Dowód. • Rozważamy $C^*(x,e)$ i mamy wtedy

$$\left(\|x^2\| \overset{x=x^*}{=} \|x^*x\| \overset{C^*}{=}\right) \|x\|^2 = (r(x))^2 = |\lambda_0|^2 = |\hat{x}(\varphi_0)|^2 = |\varphi_0(x)|^2 \Rightarrow |\varphi_0(x)| = \|x\|$$

gdzie λ_0 = „max el. $\sigma(x)$"

Tutaj $\varphi_0 \in \mathrm{Spec}(C^*(x,e))$ a więc $\begin{cases} \varphi_0(e) = 1 \\ \|\varphi_0\| = 1 \end{cases}$

• Z Hahna-Banacha przedłużamy z zach. normy do $\varphi \in A'$ i dalej $\varphi(e) = 1 = \|\varphi\|$, $|\varphi(x)| = \|x\|$: z Lematu 2.4. $\varphi \geq 0$ więc φ = stan ⊗

Wniosek 2.6 Niech φ - jak wyżej oraz $\pi = \pi_\varphi$ - repr. GNS dla stanu φ. Wtedy $\|\pi(x)\| = \|x\|$

Dowód. • Skoro $x = x^*$ to $\pi(x) = \pi(x^*) = \pi(x)^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\pi(x)\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle|$ (tu $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ - pr. Hilberta dla GNS ale wystarczy brać „sup" po zbiorze gęstym $\{ + N_\varphi : \in A\}$)

• zatem $|\langle \pi(a)(y+N_\varphi), y+N_\varphi\rangle| = |\langle ay + N_\varphi, y+N_\varphi\rangle| = |\varphi(y^*ay)|$

$\leq \|a\| \underbrace{\varphi(y^*y)}_{=\|y+N_\varphi\|^2_{\mathcal{H}_\varphi} \leftarrow \text{zał. że } =1} = \|a\|$ więc $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ (tak jest zawsze)

w szczególności $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$

• no ale $\|\pi(x)\| \geq |\langle \pi(x)(e+N_\varphi), e+N_\varphi\rangle| = |\langle x+N_\varphi, e+N_\varphi\rangle| = |\varphi(e^*x)|$

$= |\varphi(x)| = \|x\|$ zatem $\|\pi(x)\| = \|x\|$ ⊗

Wniosek 2.7 Niech $\pi = \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi$ wtedy π jest wierna.

Dowód $\pi(x) = 0$ $x = a + ib$, a,b - samosprzężone $\Rightarrow \pi(a) + i\pi(b) = 0$ ale $\begin{matrix}\pi(a)^* = \pi(a^*) = \pi(a) \\ \pi(b)^* = \pi(b^*) = \pi(b)\end{matrix} \Rightarrow$ skoro

$\pi(a)+i\pi(b)=0 \Rightarrow \pi(a)=\pi(b)=0 \underset{\text{wn. 2.6.}}{\Longrightarrow} a=b=0 \Rightarrow x=0$ ⊠

Interesują nas niezdegenerowane reprezentacje

Def 2.8 $\pi: A \to B(\mathcal{H})$ jest niezdegenerowana gdy $\forall_{\xi\in\mathcal{H}}$ zachodzi implikacja
$\forall_{a\in A}\ \pi(a)\xi=0 \Rightarrow \xi=0$

Określmy $\mathcal{H}_0 := \{\xi\in\mathcal{H}: \forall_{a\in A}\ \pi(a)\xi=0\}$ (z ciągłości $\pi(a)$ to jest domknięte i jest to podprzestrzeń $\mathcal{H}$)

Fakt 2.9 $\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp$ jest gęste w $\mathcal{H}_0^\perp$.

Dowód • $\xi\in\mathcal{H}_0 \Rightarrow \forall_{a\in A}\ \pi(a)\xi=0 \Rightarrow \forall_{\substack{b\in A\\ a\in A}}\ \pi(b)(\pi(a)\xi)=\pi(ab)\xi=0 \Rightarrow \pi(a)\xi\in\mathcal{H}_0\ \forall_{a\in A}$

$\Rightarrow \mathcal{H}_0$ jest $\pi(A)$ niezmiennicza $\underset{\pi(A)\text{ jest }*\text{-alg.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{H}_0$ jest $\pi(A)$ redukująca $\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi(A)\mathcal{H}_0^\perp \subseteq \mathcal{H}_0^\perp$; zatem zawężamy się do $\mathcal{H}_0^\perp$

• Niech $\underset{\text{oraz } \xi\in\mathcal{H}_0^\perp}{\xi\perp\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp} \Rightarrow \forall_{\substack{a\in A\\ \eta\in\mathcal{H}_0^\perp}}\ 0=\langle\xi,\pi(a)\eta\rangle=\langle\pi(a)^*\xi,\eta\rangle=\langle\pi(a^*)\xi,\eta\rangle$

$\Rightarrow \forall_{a\in A}\ \pi(a^*)\xi\in\mathcal{H}_0^{\perp\perp}=\mathcal{H}_0 \Rightarrow \forall_{\substack{b\in A\\ a\in A}}\ \pi(b)(\pi(a^*)\xi)=\pi(ba^*)\xi=0$

- Biorąc $b=a$ mamy $\pi(aa^*)\xi=0 \Rightarrow \forall_{a\geq 0}\ \pi(a)\xi=0 \Rightarrow \forall_{a=a^*}\ \pi(a)\xi=0 \Rightarrow \forall_{a\in A}\ \pi(a)\xi=0.$

$\Rightarrow \xi\in\mathcal{H}_0$ no ale $\xi\in\mathcal{H}_0^\perp \Rightarrow \xi=0$ ⊠

Wniosek 2.10 i) $\pi_0: A\to B(\mathcal{H}_0^\perp)$ $\pi_0(a)=\pi(a)|_{\mathcal{H}_0^\perp}$ jest niezdegenerowana.

Dowód • Z pierwszej części dowodu Faktu 2.9 π_0 jest dobrze określone

• niech $\xi\in\mathcal{H}_0^\perp$ i $\forall_{a\in A}\ \pi(a)\xi=0$: wtedy $\forall_{\substack{a\in A\\ \eta\in\mathcal{H}_0^\perp}}\ \langle\xi,\pi(a)\eta\rangle=\langle\underbrace{\pi(a^*)\xi}_{=0},\eta\rangle=0$

$\Rightarrow \xi\perp\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp \overset{(2.9)}{\Longrightarrow} \xi\perp\mathcal{H}_0^\perp \Rightarrow \xi=0$ //

ii) $\pi: A\to B(\mathcal{H})$ jest niezdegenerowana $\Leftrightarrow \overline{\pi(A)\mathcal{H}}=\mathcal{H}$

Dowód „$\Rightarrow$" „$\Leftarrow$" π – niezdeg. $\Leftrightarrow \mathcal{H}_0=\{0\} \Leftrightarrow \mathcal{H}_0^\perp=\mathcal{H}$ no ale mamy zawsze

$\overline{\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp}=\mathcal{H}_0^\perp$ i teraz

→ gdy π – niezdeg. $\Rightarrow \mathcal{H}_0=0 \Rightarrow \mathcal{H}_0^\perp=\mathcal{H} \Rightarrow \overline{\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp}=\overline{\pi(A)\mathcal{H}}$, $\overline{\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp}=\mathcal{H}_0^\perp=\mathcal{H}$ $\Rightarrow \overline{\pi(A)\mathcal{H}}=\mathcal{H}$

→ gdy $\overline{\pi(A)\mathcal{H}}=\mathcal{H} \Rightarrow \overline{\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp}\overset{\text{zawsze}}{=}\mathcal{H}_0^\perp$, $\overline{\pi(A)\mathcal{H}}\overset{\text{założenie}}{=}\mathcal{H}$, $\overline{\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp}\overset{(*)}{=}\overline{\pi(A)\mathcal{H}}$

(*) gdy $\xi\in\mathcal{H}$, $\xi=\xi_0+\xi_0^\perp$ $\xi_0\in\mathcal{H}_0$, $\xi_0^\perp\in\mathcal{H}_0^\perp$ to $\pi(a)\xi=\underbrace{\pi(a)\xi_0}_{0}+\pi(a)\xi_0^\perp\in\pi(A)\mathcal{H}_0^\perp$ ⊠

Fakt 2.11 Niech $A\subseteq B(\mathcal{H})$ oraz A działa niezdegenerowanie: jeżeli $x\in B(\mathcal{H})$ spełnia $\forall_{a\in A}\ xa=0 \Rightarrow x=0$

Dowód $\forall_{a\in A}\ xa=0 \Rightarrow xA=0 \Rightarrow xA(\mathcal{H})=0 \Rightarrow x\underbrace{\overline{A(\mathcal{H})}}_{=\mathcal{H}}=0 \Rightarrow x(\mathcal{H})=0 \Rightarrow x=0$ ⊠

Niech teraz $A \subseteq B(H)$, A - C*-algebra bez jedynki, A - niezdegenerowana

Def 2.12 $x \in B(H)$ jest nazywany mnożnikiem gdy $\substack{xA \subseteq A \\ Ax \subseteq}$. Ozn. $M(A)$

Własność 2.13 i) $M(A)$ jest $*$ - algebrą

Dowód Np. $x, y \in M(A)$, niech $a \in A$ wtedy $(xy)a = x\overset{\in A}{(ya)} \in xA \subseteq A$ itd...

podobnie $x^* a = \underset{\in A}{\underbrace{(a^* x)}}^* \in A$ //

ii) $M(A)$ jest domknięte w $B(H)$

Dowód $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M(A)$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ dla $a \in A$: $xa = (\lim_{n\to\infty} x_n)a = \lim_{n\to\infty} \overset{\in A}{(x_n a)} \in A$ //
$ax = a \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a x_n)$

iii) $M(A)$ ma jedynkę.

Dowód Jest nią $e = I_H$ bo $\substack{ea = a \in A \\ ae = a}$ dla $a \in A$ //

iv) $M(A) \subseteq A''$

Dowód niech $x \in M(A)$ wtedy $xA \subseteq A \Rightarrow (xA)'' \subseteq A''$ no ale
$(xA)'' = \overline{xA}^{SOT} = x\overline{A}^{SOT} = xA'' \Longrightarrow xA'' \subseteq A'' \xRightarrow{e \in A''} \underset{x}{xe} \in A''$ //

v) $A \subseteq M(A)$

Dowód niech $x \in A$, $a \in A \Rightarrow xa, ax \in A \Rightarrow x \in M(A)$ //

vi) A jest ideałem istotnym w $M(A)$.

Dowód • Gdy $x \in M(A)$, $a \in A \Rightarrow xa, ax \in A \Rightarrow A$ jest ideałem
• $x \in M(A)$, $xA = 0 \Rightarrow \overset{2.11}{\ldots} \Rightarrow x = 0$ stąd A - istotny //

vii) Gdy $A \subseteq \tilde{A} \subseteq A''$ oraz A jest ideałem istotnym w $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} \subseteq M(A)$.

Dowód A = ideał w $\tilde{A} \Rightarrow \forall_{\substack{x \in \tilde{A} \\ a \in A}} xa, ax \in A \Rightarrow x$ spełnia def. należenia do $M(A)$ $\Big| \Rightarrow x \in M(A)$ ⊠

Uwaga 2.14 A ma jedynkę $\Leftrightarrow A = M(A)$

Dowód „$\Leftarrow$" bo $M(A)$ ma jedynkę
„$\Rightarrow$" weźmy jedynkę $e \in A$ i niech $x \in M(A)$. wtedy $\substack{xe \in A \\ ex^e}$ $\Big| \overset{xe = x}{\Rightarrow} x \in A$ ⊠

Przykład 2.15 $M(C_0(X)) = C_b(X)$

• wybieramy reprezentację $\pi: C_0(X) \to B(L^2(X))$ $\pi(f)g = fg$ (L^2 względem pewnej miary μ)
(gdy $\underset{g \neq 0}{g \in L^2(X)}$ tzn. $\mu(\{x \in X : |g(x)| > 0\}) > 0$, b.s.o. $K := \{x \in X : |g(x)| > 0\}$ - zwarty
dobieramy $\underset{f|_K = 1}{f \in C_0(X)}$ wtedy $\pi(f)g = fg \neq 0$ bo na K to jest g
Stąd π - niezdegenerowana — zawsze! z kolei π - wierna gdy $\mathrm{supp}\,\mu = X$)

• wtedy $\pi(A)'' = \overline{\pi(A)}^{WOT} = L^\infty(X)$ (dowolne $f \in L^\infty(X)$ jest granicą ciągu funkcji
prostych a dowolna prosta

granica ciągu ciągłych zwiadanych w po...

• Mamy więc $C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq L^\infty(X) (= \pi(A)'')$ oraz $C_0(X)$ jest ideałem w $C_b(X) \Rightarrow C_b(X) \subseteq M(C_0(X))$

• Na odwrót: $M(C_0(X)) \overset{2.13.vi)}{\subseteq} \pi(A)'' = L^\infty(X)$ więc wystarczy spr. $f \in M(C_0(X)) \Rightarrow f$ - ciągła: ust. $x_0 \in X$, $U \in \tau(X)$ że $\overline{U}$ - zwarte i niech $g \in C_0(X)$ że $g|_{\overline{U}} = 1$ wtedy $fg \in C_0(X)$ (bo $f \in M(C_0(X)) \Rightarrow fg$ - ciągła $\Rightarrow (fg)|_{\overline{U}}$ - ciągła ale $(fg)|_{\overline{U}} \overset{g|_{\overline{U}}=1}{=} f|_{\overline{U}} \Rightarrow f|_{\overline{U}}$ - ciągła $\Rightarrow f$ ciągła w $x_0 \xRightarrow{\text{dow. } x_0} f$ ciągła //

Uwagi 2.16 • W dowodzie 2.13. vii) de facto nie potrzebujemy, że $\tilde{A} \subseteq A''$ oraz, że A jest ideałem istotnym ale potrzebujemy, że A działa niezdegenerowanie (a to z faktu 2.11 dostaję, że gdy A - ideał w $B(H)$ to A - istotny)

• skoro $M(C_0(X)) = C_b(X)$ to $M(A)$ - przemienna gdy A przemienna (bo dowolna przemienna jest postaci $C_0(X)$) (na odwrót także) jednak de facto wystarczy że $M(C_0(X)) \subseteq \pi(C_0(X))'' = L^\infty(X)$ bo $L^\infty(X)$ jest przemienna.

Przykład 2.17 $M(K(H)) = B(H)$: wystarczy, że $K(H)$ działa niezdegenerowanie na H no ale tak jest: gdy $\forall_{\substack{A \in K(H)\\ \xi \in H}} A\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ bo dla $\xi \neq 0$ wystarczy wziąć $A = |\xi\rangle\langle\xi| \in K(H)$ wtedy $A\xi = \|\xi\|^2 \cdot \xi \neq 0$ //

Wada konstrukcji: wymaga wyboru reprezentacji: jak to obejść?

Def 2.18 $DC(A) := \{(L,R) \quad L,R: A \to A, \ \forall_{x,y \in A} R(x)y = xL(y)\}$
(double centralizers).

Fakt 2.19 Niech $(L,R) \in DC(A)$ wtedy:

(i) $L(xy) = L(x)y$
$R(xy) = xR(y)$

Dowód. • Niech $(e_s)_{s \in S}$ = jedność aproksymatywna A wtedy

$$\underbrace{R(xy)e_s}_{\to R(xy)} = xyL(e_s) = \underbrace{xR(y)e_s}_{\to xR(y)} \Rightarrow R(xy) = xR(y)$$

• Podobnie

$$\underbrace{e_sL(xy)}_{\to L(xy)} = R(e_s)xy = \underbrace{e_sL(x)y}_{\to L(x)y} \Rightarrow L(xy) = L(x)y$$

//

(ii) L, R są liniowe

Dowód. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in A$ i $(e_s)_{s \in S}$ - jedność aproksymatywna:

$$e_sL(\alpha x + \beta y) = R(e_s)(\alpha x + \beta y) = \alpha R(e_s)x + \beta R(e_s)y = \alpha e_s L(x) + \beta e_s L(y) =$$
$$= e_s(\alpha L(x) + \beta L(y)) \xRightarrow{e_s \to} L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

$$R(\alpha x + \beta y)e_s = (\alpha x + \beta y)L(e_s) = \alpha xL(e_s) + \beta yL(e_s) = \alpha R(x)e_s + \beta R(y)e_s =$$
$$= (\alpha R(x) + \beta R(y))e_s$$

$\Rightarrow R(\alpha x+\beta y) = \alpha R(x) + \beta R(y)$ //

iii) L i R są ograniczone i $\|L\| = \|R\|$

Dowód - z tw. o wykresie domkniętym: gdy $x_n \to x$, $L x_n \to y$ dla $a \in A$ mamy:

$\|aL(x) - ay\| \le \|aL(x) - aL(x_n)\| + \|aL(x_n) - ay\| =$

$= \|R(a)x - R(a)x_n\| + \|aL(x_n) - ay\| \le \|R(a)\| \cdot \underbrace{\|x - x_n\|}_{0} + \|a\| \, \underbrace{\|L(x_n) - y\|}_{0} \to 0$

$\Rightarrow aL(x) = ay \xRightarrow{a = e_s} e_s L(x) = e_s y \Rightarrow L(x) = y \Rightarrow L$ - ciągły.

$e_s L(x) \to L(x)$, $e_s y \to y$

Analogicznie R - ciągły

- $\|L(x)\|^2 = \|L(x)^* L(x)\| = \|R(L(x)^*)x\| \le \|R\| \cdot \underbrace{\|L(x)^*\|}_{= \|L(x)\| \le \|L\| \cdot \|x\|} \cdot \|x\| \le \|R\| \cdot \|L\| \cdot \|x\|^2$

$\Rightarrow \|L\|^2 \le \|R\| \cdot \|L\| \Rightarrow \|L\| \le \|R\|$ i analogicznie

$\|R\| \le \|L\|$ ⊠

Działania na $DC(A)$: $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$

$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$

$\alpha (L, R) = (\alpha L, \alpha R)$

$(L, R) = (R^*, L^*)$ gdzie $L^*(x) = L(x^*)^*$

$\|(L, R)\| = \|L\| \ (= \|R\|)$

Uwaga 2.20 - $L_1 L_2$ rozumiemy jako złożenie (liniowych) operatorów:
nie jest całkiem oczywiste, że $(L_1 L_2, R_2 R_1) \in DC(A)$: gdy $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in DC(A)$
$\Rightarrow (L_1 L_2, R_1 R_2) \in DC(A)$ bo: $(R_2 R_1)(x) y = R_2(R_1(x)) y = R_1(x) L_2(y) = x L_1(L_2(y)) =$
$= x (L_1 L_2)(y)$

- zachodzi $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$ (bez zmiany kolejności):

$(L_1 L_2)^*(a) = (L_1 L_2(a^*))^* = L_1(L_2(a^*))^*$

$L_1^* L_2^*(a) = L_1^*(L_2^*(a)) = L_1^*(L_2(a^*)^*) = L_1(\underbrace{[L_2(a^*)^*]^*}_{= L_2(a^*)})^*$

- teraz $((L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2))^* = (L_1 L_2, R_2 R_1)^* = ((R_2 R_1)^*, (L_1 L_2)^*) = (R_2^* R_1^*, L_1^* L_2^*)$
$(L_2, R_2)^* \cdot (L_1, R_1)^* = (R_2^*, L_2^*) \cdot (R_1^*, L_1^*) = (R_2^* R_1^*, L_1^* L_2^*)$ //

- oczywiście $T^{**} = T$ no bo $T^{**}(a) = (T^*(a^*))^* = (T(a^{**})^*)^* = T(a^{**})^{**} = T(a)$

Tw. 2.21 $DC(A)$ jest C^*-algebrą z jedynką oraz $A \hookrightarrow DC(A)$.

Dowód - łatwiejsze warunki pomijamy: sprawdźmy np. submultiplikatywność:

$\|(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2)\| = \|(L_1 L_2, R_1 R_2)\| = \|L_1 L_2\| \le \|L_1\| \cdot \|L_2\| = \|(L_1, R_1)\| \cdot \|(L_2, R_2)\|$

• warunek C^* (równość): $\|(L,R)^*(L,R)\| = \|(R^*,L^*)\cdot(L,R)\| = \|(R^*L, RL^*)\| =$

$= \|R^*L\| \le \|R^*\|\cdot\|L\| = \underbrace{\|R\|\cdot\|L\|}_{=\|L\|^2}$ więc pokażemy, że $\|L\|^2 \le \|R^*L\|$

Dla $\varepsilon>0$ znajdziemy $x\in A$, $\|x\|=1$: $\|L\|^2 \le \|Lx\|^2 + \varepsilon = \|L(x)^*L(x)\| + \varepsilon$

$= \|R(L(x)^*)x\| + \varepsilon \le \|R(L(x)^*)\|\cdot\|x\| + \varepsilon = \|R(L(x)^*)\| + \varepsilon =$

$= \|R(L(x)^*)^*\| + \varepsilon = \|R^*(L(x))\| + \varepsilon = \|R^*L(x)\| + \varepsilon \le \|R^*L\| + \varepsilon$

ε-dowolne $\Longrightarrow \|L\|^2 \le \|R^*L\| \le \|R\|\cdot\|L\| = \|L\|^2$ więc mamy równość.

• zupełność $\{(L_n,R_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq DC(A)$ ciąg Cauchy'ego tzn.

$\underbrace{\|(L_n,R_n)-(L_m,R_m)\|}_{\|(L_n-L_m,\, R_n-R_m)\| \ \ge\ \|L_n-L_m\|} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ z zupełności $B(A,A)$ i tego, że $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ciągi Cauchy'ego w $B(A,A) \Longrightarrow \exists\ L := \lim_{n\to\infty} L_n$, $R := \lim_{n\to\infty} R_n$

i $R(x)y = (\lim_{n\to\infty} R_n)(x)y = \lim_{n\to\infty}(R_n(x))\cdot y = \lim_{n\to\infty} R_n(x)y = \lim_{n\to\infty}(xL_n(y)) =$

$= x\lim_{n\to\infty} L_n(y) = xL(y) \Longrightarrow (L,R)\in DC(A)$.

• jedynką jest (id_A, id_A) bo $(L,R)\cdot(id_A,id_A) = (L\, id_A, id_A R) = (L,R)$

$(id_A,id_A)(L,R) = \dots$

oczywiście $id_A(x)y = xy = x\, id_A(y)$

• $A \hookrightarrow DC(A)$ w sposób: $a\in A$ wyznacza (L_a,R_a) że $L_a(b)=ab$, $R_a(b)=ba$

wtedy $R_a(x)y = (xa)y = x(ay) = xL_a(y) \Longrightarrow (L_a,R_a)\in DC(A)$

(i jeszcze co to $L_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = L_aL_b(x)$

$L_{a^*}(x) = a^*x = (x^*a)^* = R_a(x^*)^* = R_a^*(x)$ podobnie $R_{a^*} = L_a^*$

skąd $(L_{a^*}, R_{a^*}) = (R_a^*, L_a^*) = (L_a,R_a)^*$)

• iniektywność $\|L_x(x^*)\| = \|xx^*\| = \|x\|^2$ zatem $x\neq 0 \Rightarrow L_x\neq 0$ stąd $(x\mapsto(L_x,R_x))$ jest iniekcją i z ogólnej teorii izometrią

Tw. 2.22 Odwzorowanie $T: M(A)\ni x\mapsto (L_x,R_x)\in DC(A)$ jest izomorfizmem.

Dowód. • To, że $x\in M(A)$ oznacza, że dla $a\in A$ jest $xa, ax\in A$

$\Longrightarrow L_x(a), R_x(a)\in A \Longrightarrow L_x, R_x: A\to A$ więc to ma sens no i znowu

$R_x(y)z = (yx)z = y(xz) = yL_x(z) \Longrightarrow (L_x,R_x)\in DC(A)$

• Zachowywanie działań: tak samo jak dla włożenia $A\hookrightarrow DC(A)$.

• Najważniejsze to: surjektywność! Ustalmy $(L,R)\in DC(A)$

niech $(e_s)_{s\in S}$ = jedność aproksymatywna w $A \Rightarrow (e_s)_{s\in S}$ - ciąg ogr. w A

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}(L(e_s))_{s\in S}\\ (R(e_s))_{s\in S}\end{matrix}\right\}$ ograniczone w $A \subseteq B(\mathcal{H}) \Rightarrow$ są zawarte w pewnej kuli

w $B(\mathcal{H})$ ale kula jest $*$-sł. zwarta $\Rightarrow$ $\underset{\text{do „podciągu”}}{\text{przechodząc}}$ $\Rightarrow \underset{x_L, x_R \in B(\mathcal{H})}{\exists}$

$$x_L = \lim_{s\in S} L(e_s)$$
$$x_R = \lim_{s\in S} R(e_s)$$

• Twierdzimy, że $x_L = x_R$: $\underset{y,z\in B(\mathcal{H})}{\forall}$ $yx_Lz = y(\lim_s L(e_s))z = \lim_s (yL(e_s)z) = \lim_s (R(y)e_s z) =$

$$= R(y)\lim_s(e_s z) = R(y)z$$

$$yx_Rz = y(\lim_s R(e_s))z = \lim_s(yR(e_s)z) = \lim_s(ye_s L(z)) = \lim_s(ye_s)L(z) = yL(z)$$

$\xRightarrow{y,z\text{-dowolne}}$ $x_L = x_R$: gdybyśmy wzięli inny podciąg i rozważyli odp. x_L', x_R' to

wyjdzie jak wyżej $yx_Lz = yx_L'z \Rightarrow x_L = x_L'$

• Zatem $x = x_L = x_R$ jest poprawnie określony no i mamy

$$L(a) = \lim_{s\in S}(e_s L(a)) = \lim_{s\in S}(R(e_s)a) = (\lim_{s\in S} R(e_s))a = x_R a = xa = L_x(a)$$
$$R(a) = \lim_{s\in S}(R(a)e_s) = \lim_{s\in S}(aL(e_s)) = a\lim_{s\in S} L(e_s) = ax_L = ax = R_x(a)$$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}L = L_x\\ R = R_x\end{matrix}\right. \Rightarrow (L,R) = (L_x, R_x)$ (i skoro $L, R: A \to A$ to $L(a), R(a) \in A$ czyli $xa, ax \in A \Rightarrow x \in M(A)$) ⊠